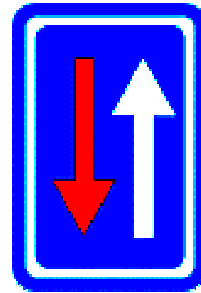


Ascenseur social



Niveau

Énoncé n° 1 : Troisième, seconde.

Énoncé n° 2 : Terminales STG, ST2S, ES ou S.

Situation étudiée

On dispose des données suivantes :

Proportions d'élèves reçus à l'École polytechnique	1950	1990
d'origine défavorisée	21 %	7,8 %
d'origine favorisée	79 %	92,2 %

À la vue de ces chiffres, il semble que « l'ascenseur social » soit plus qu'en panne.

Il faut cependant, pour analyser ces chiffres, tenir compte de l'évolution de structure de la société comme le montre le tableau suivant :

Proportions de la population des 20-24 ans	1950	1990
d'origine défavorisée	90,8 %	68,2 %
d'origine favorisée	9,2 %	31,8 %

Comment tenir compte des deux tableaux pour voir réellement si la discrimination sociale est plus (ou moins) importante en 1990 qu'en 1950 ?

Type d'activité

Exercice.

Durée

Énoncé n°1 : 45 minutes.

Énoncé n°2 : 55 minutes.

Objectifs

Contenus mathématiques au programme

Énoncé n° 1 : Proportions, calcul littéral.

Énoncé n° 2 : Probabilités conditionnelles.

Enjeux citoyens

Favoriser l'analyse « critique » des données chiffrées en sensibilisant aux effets de « structure ».

Mettre en oeuvre des outils mathématiques (adaptés au niveau des élèves) permettant de quantifier la notion d'égalité (ou d'inégalité) des chances et son évolution entre deux périodes.

Pour l'énoncé n° 2 (terminale) :

Comprendre que tous les paramètres statistiques ne se valent pas, qu'ils peuvent conduire à des conclusions contradictoires (avec des calculs exacts et a priori « raisonnables ») et que la connaissance de leurs propriétés mathématiques permet d'en privilégier certains. La définition et les propriétés mathématiques d'un indicateur sont essentielles à connaître pour en comprendre le sens. Citons Claudine Schwartz (dans *Pratiques de la statistique* – Vuibert 2006) : « Notre société utilise de plus en plus d'indicateurs. [...] Ils n'ont pas de caractère absolu, leur interprétation est délicate, mais ils sont aujourd'hui nécessaires à l'appréhension des aspects variés du monde qui nous entoure. »

Capacités et attitudes

Esprit critique.

Interprétation des calculs et des résultats.

Réflexion sur un sujet de société.

Organisation

Exercice en classe ou en devoir à la maison.

Le second énoncé, plus long, peut être terminé à la maison.

Description des activités

Exercice en termes de proportions (3^{ème} – 2^{nde})

Énoncé élève (niveau troisième, seconde)

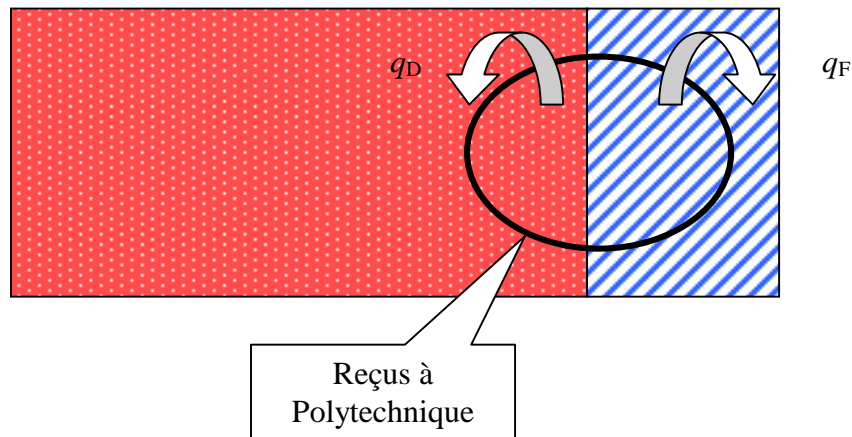
On dispose du tableau suivant, donnant, parmi les élèves reçus à l'École polytechnique, la proportion de ceux issus de classes « défavorisées » et ceux issus de classes « favorisées », pour les périodes 1950 et 1990.

Proportions d'élèves reçus à l'École polytechnique	1950	1990
d'origine défavorisée	21 %	7,8 %
d'origine favorisée	79 %	92,2 %

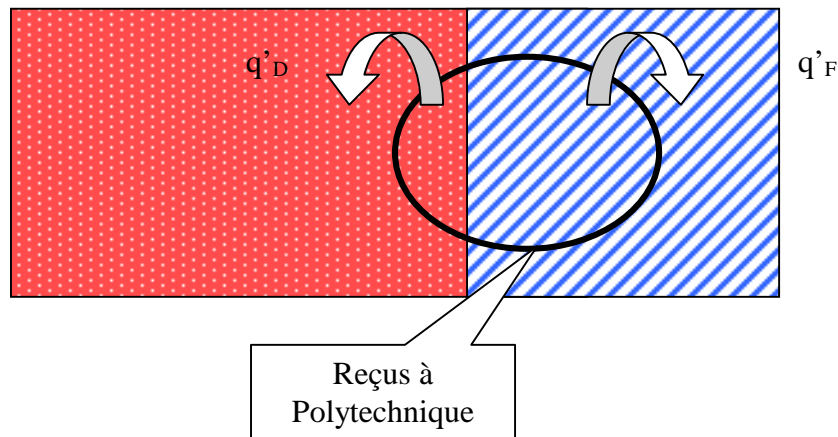
Pour étudier si la discrimination sociale est plus forte dans les années 1990 que dans les années 1950, il faut tenir compte de l'évolution de la composition de la société française entre ces deux périodes.

Proportions de la population des 20-24 ans	1950	1990
d'origine défavorisée	90,8 %	68,2 %
d'origine favorisée	9,2 %	31,8 %

1950 : population défavorisée | favorisée



1990 : population défavorisée | favorisée



1. Que signifie 21% dans le premier tableau ?

Que signifie 90,8% dans le second tableau ?

2. a) On note r le nombre de reçus à Polytechnique en 1950, exprimer en fonction de r le nombre de reçus à Polytechnique d'origine défavorisée en 1950.

b) On note n le nombre de jeunes de 20-24 ans en 1950.

Montrer que proportion q_D de reçus à Polytechnique parmi la population défavorisée en

1950 est $q_D = \frac{0,21 \times r}{0,908 \times n}$.

3. Donner, de même, l'expression de la proportion q_F de reçus à Polytechnique parmi la population favorisée en 1950.

4. On note $t = \frac{q_F}{q_D}$. Montrer que $t \approx 37$.

On peut interpréter ce résultat en disant qu'en 1950 un jeune « favorisé » a 37 fois plus de chances d'entrer à Polytechnique qu'un jeune « défavorisé ».

5. Pour comparer avec la situation en 1990, on utilise les mêmes notations que ci-dessus,

avec un '. On considère donc $t' = \frac{q'_F}{q'_D}$.

Calculer t' .

Peut-on considérer que « l'ascenseur social » s'est amélioré entre 1950 et 1990 ?

6. On souhaite utiliser le tableur (selon l'image d'écran suivante) pour calculer les quotients t et t' dans les quatre autres cas de ce tableau :

Proportions d'élèves d'origine défavorisée	1950	1990
ENA (École nationale d'administration)	18,3 %	6,1 %
ENS (Écoles normales supérieures)	23,9 %	6,1 %
HEC (Hautes études commerciales)	38,2 %	11,8 %
Grandes écoles (avec entrée sur concours)	29 %	8,6 %

On pourra organiser les calculs (ici pour l'École polytechnique) selon l'image d'écran, de sorte qu'il suffise de modifier le contenu des cellules B2 et C2.

	A	B	C	D
1	Proportion d'élèves reçus	1950	1990	
2	D	0,21	0,078	
3	F	0,79	0,922	
4				
5	Proportion des 20-24 ans	1950	1990	
6	D	0,908	0,682	
7	F	0,092	0,318	
8				
9		t	t'	
10		37,1283644	25,3509111	
11				

Interpréter les résultats obtenus.

Éléments de réponse (niveau troisième, seconde)

2. Le nombre de reçus d'origine défavorisée est $0,21 \times r$ et le nombre de 20-24 ans d'origine défavorisée est $0,908 \times n$.

3. On a $q_F = \frac{0,79 \times r}{0,092 \times n}$.

4. On a $q_D = \frac{0,21 \times r}{0,908 \times n}$. D'où $t = \frac{0,79}{0,092} \times \frac{0,908}{0,21} \approx 37$.

5. On a $q_F' = \frac{0,922 \times r'}{0,318 \times n'}$ et $q_D' = \frac{0,078 \times r'}{0,682 \times n'}$. D'où $t' = \frac{0,922}{0,318} \times \frac{0,682}{0,078} \approx 25$.

Pour ce qui concerne Polytechnique, on peut considérer que l'ascenseur social s'est (un peu) amélioré.

6. On peut entrer en B3 la formule =1-B2 puis la recopier vers la droite en C3.

On peut entrer en B10 la formule =(B3/B7)*(B6/B2) puis la recopier vers la droite en C10.

On obtient les résultats suivants (arrondis à l'unité).

	t	t'
ENA (École nationale d'administration)	44	33
ENS (Écoles normales supérieures)	31	33
HEC (Hautes études commerciales)	16	16
Grandes écoles (avec entrée sur concours)	24	23

On peut considérer globalement que les inégalités sociales de recrutement de ces écoles sont importantes et ont peu évolué entre 1950 et 1990.

Commentaires

- Il faut d'abord préciser qu'il ne s'agit ici que du cas des grandes écoles, qui ne constituent pas l'unique filière de « réussite » ou d'ascension sociale. Le cas du supérieur en général est différent, en particulier avec la création des BTS et des IUT.

- Source des données : Euriat et Thélot – *Le recrutement des élites scolaires depuis 40 ans* – Revue *Éducation et formation* – juin 1995.

L'exemple proposé a été cité par Jean-Louis Piednoir², en termes de proportions, pour illustrer le fait qu'il faut comparer ce qui est comparable et en particulier tenir compte de l'évolution de la constitution de la population sous-jacente. Le même exemple est beaucoup plus développé dans un ouvrage récent par Claudine Schwartz³, en termes de probabilités conditionnelles, en particulier pour souligner le fait que la définition et les propriétés mathématiques d'un indicateur sont essentielles à connaître pour en comprendre le sens. Pour la petite histoire, signalons que Jacques Attali, par ailleurs polytechnicien, chargé par le ministre Claude Allègre d'un rapport sur l'organisation des études supérieures, citant les chiffres donnés ici en tête d'exercice, concluait à une « dé-démocratisation » du recrutement des élites. On a un peu moins de complexes à être nous mêmes parfois victimes d'erreurs dues à un « effet de structure » ou une variable cachée.

- La notion de classe défavorisée ou de classe populaire n'est bien sûr pas intrinsèque. Il est clair que la définition choisie influe sur les résultats, mais cela ne semble pas être l'élément essentiel ici.

Exercice en termes de probabilités conditionnelles (terminales STG-ST2S-ES-S)

Énoncé élève (niveau terminale)

On dispose du tableau suivant, donnant, parmi les élèves reçus à l'École polytechnique, la proportion de ceux issus de classes « défavorisées » et ceux issus de classes « favorisées », pour les périodes 1950 et 1990.

Proportions d'élèves reçus à l'École polytechnique	1950	1990
d'origine défavorisée	21 %	7,8 %
d'origine favorisée	79 %	92,2 %

Pour étudier si la discrimination sociale est plus forte dans les années 1990 que dans les années 1950, il faut tenir compte de l'évolution de la composition de la société française entre ces deux périodes.

Proportions de la population des 20-24 ans	1950	1990
d'origine défavorisée	90,8 %	68,2 %
d'origine favorisée	9,2 %	31,8 %

On prélève un jeune au hasard dans la population des 20-24 ans de 1950.

² Piednoir (Jean-louis) – Dutarte (Philippe) – *Enseigner la statistique au lycée : des enjeux aux méthodes* – IREM de Paris-Nord – 2001.

³ Schwartz (Claudine) – *Pratiques de la statistique* – Vuibert 2006 – Chapitre 3 : *Des mots et des chiffres : probabilités conditionnelles, risques relatifs*. On consultera cet ouvrage pour mettre en perspective les activités proposées ici.

On note D l'événement « le jeune est issu de la classe défavorisée ».

On note F l'événement « le jeune est issu de la classe favorisée ».

On note R l'événement « le jeune a été reçu à l'École polytechnique ».

1. Donner la valeur des probabilités suivantes $P(D)$, $P(F)$, $P_R(D)$ et $P_R(F)$.

2. Justifier que $P_D(R) = \frac{P_R(D) \times P(R)}{P(D)}$ et établir la formule analogue pour $P_F(R)$.

3. En déduire que $P_F(R) \approx 37 \times P_D(R)$.

Traduire ce résultat par une phrase en français.

4. On prélève un jeune au hasard dans la population des 20-24 ans de 1990.

On note D' l'événement « le jeune est issu de la classe défavorisée ».

On note F' l'événement « le jeune est issu de la classe favorisée ».

On note R' l'événement « le jeune a été reçu à l'École polytechnique ».

Montrer qu'en 1990 la probabilité d'être reçu à Polytechnique était environ 25 fois plus importante pour un jeune favorisé que pour un jeune défavorisé.

Que peut-on en déduire comparativement à 1950 ?

5. Pour compléter cette étude on a considéré les quatre autres cas suivants :

Proportions d'élèves d'origine défavorisée (D)	1950	1990
ENA (École nationale d'administration)	18,3 %	6,1 %
ENS (Écoles normales supérieures)	23,9 %	6,1 %
HEC (Hautes études commerciales)	38,2 %	11,8 %
Grandes écoles (avec entrée sur concours)	29 %	8,6 %

On obtient les résultats suivants (arrondis à l'unité) :

Rapport entre les probabilités d'être reçu d'un jeune issu de la classe favorisée et d'un jeune issu de la classe défavorisée	1950	1990
ENA (École nationale d'administration)	44	33
ENS (Écoles normales supérieures)	31	33
HEC (Hautes études commerciales)	16	16
Grandes écoles (avec entrée sur concours)	24	23

Quels commentaires peut-on faire ?

6. On pourrait considérer qu'au lieu de faire le rapport des probabilités d'être reçu entre un jeune issu de la classe défavorisée et un jeune issu de la classe favorisée, il convient de faire le rapport des probabilités d'être reçu entre un jeune issu de la classe défavorisée et un jeune quelconque, c'est-à-dire $\frac{P_D(R)}{P(R)}$, pour reprendre le cas de l'École polytechnique en 1950.

Montrer que $\frac{P_D(R)}{P(R)} = \frac{P_R(D)}{P(D)}$ et en déduire la valeur de ce rapport (pour l'École polytechnique en 1950).

7. Calculer $\frac{P_{D'}(R')}{P(R')}$ pour l'École polytechnique en 1990. Comparer au résultat obtenu précédemment pour 1950. Quelle interprétation en fait-on du point de vue de l'ascenseur social ? Qu'aviez-vous conclu à propos de Polytechnique à la question 4 ?

8. Dans le cas des autres écoles, la situation est la suivante :

Rapport entre les probabilités d'être reçu d'un jeune issu de la classe défavorisée et d'un jeune quelconque	1950	1990
ENA (École nationale d'administration)	0,20	0,09
ENS (Écoles normales supérieures)	0,26	0,09
HEC (Hautes études commerciales)	0,42	0,17
Grandes écoles (avec entrée sur concours)	0,32	0,13

Lecture : en 1950, la probabilité d'un jeune défavorisé d'être reçu à l'ENA représente 20 % de celle d'un jeune quelconque.

Quel commentaire peut-on faire de ce tableau ?

9. Pour y voir un peu plus clair, on peut établir la relation liant les deux indicateurs utilisés.

Notons $t = \frac{P_F(R)}{P_D(R)}$ l'indicateur utilisé à la question 4 et $k = \frac{P_D(R)}{P(R)}$ l'indicateur utilisé à la question 6.

En utilisant que $P(R) = P(R \cap D) + P(R \cap F)$, montrer que l'on a :

$$\frac{1}{k} = P(D) + t \times (1 - P(D)).$$

10. Intéressons nous au cas de HEC où le premier indicateur est (pratiquement) constant pour les deux époques : $t = 16$. En notant x la proportion de jeunes de 20-24 ans d'origine défavorisée, on a $k = \frac{1}{x(1-t) + t} = \frac{1}{-15x + 16}$.

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{-15x + 16}$ est croissante sur $[0, 1]$.

En déduire que dans le cas de HEC, le déclin de l'ascenseur social, selon les utilisateurs de l'indicateur k , peut s'expliquer par la seule diminution du pourcentage des classes défavorisées entre 1950 et 1990.

Quel indicateur préconisez-vous pour rendre compte de l'ascenseur social dans la situation de cet exercice ?

Éléments de réponse (niveau terminale)

1. D'après les données, on a :

$$P(D) = 0,908 ; P(F) = 0,092 ; P_R(D) = 0,21 \text{ et } P_R(F) = 0,79 .$$

2. On a $P(D \cap R) = P_D(R) \times P(D) = P_R(D) \times P(R)$ d'où $P_D(R) = \frac{P_R(D) \times P(R)}{P(D)}$.

$$\text{De même, } P_F(R) = \frac{P_R(F) \times P(R)}{P(F)} .$$

3. On en déduit que $\frac{P_F(R)}{P_D(R)} = \frac{P_R(F) \times P(D)}{P_R(D) \times P(F)} = \frac{0,79 \times 0,908}{0,21 \times 0,092} \approx 37$.

Donc $P_F(R) \approx 37 \times P_D(R)$.

Ce résultat signifie qu'en 1950 la probabilité d'être reçu à Polytechnique était 37 fois plus importante pour un jeune favorisé que pour un jeune défavorisé.

4. Par un raisonnement analogue (qu'il est inutile de reproduire), on a :

$$P_{F'}(R') = \frac{0,922 \times 0,682}{0,078 \times 0,318} \approx 25 .$$

On peut en déduire qu'en ce qui concerne le recrutement à Polytechnique, l'ascenseur social s'est un peu amélioré.

5. On peut considérer globalement que les inégalités sociales de recrutement de ces écoles sont importantes et ont peu évolué entre 1950 et 1990.

Il faut cependant préciser qu'il ne s'agit ici que des grandes écoles, le cas du supérieur en général est différent, en particulier suite à la création des BTS et des IUT.

6. On a $P(D \cap R) = P_D(R) \times P(D) = P_R(D) \times P(R)$ – déjà dit – d'où $\frac{P_D(R)}{P(R)} = \frac{P_R(D)}{P(D)}$.

On en déduit que $\frac{P_D(R)}{P(R)} = \frac{0,21}{0,908} \approx 0,23$ (en 1950, les chances d'être reçu à Polytechnique d'un jeune défavorisé représentent 23 % de celles d'un jeune quelconque).

7. On a $\frac{P_D(R')}{P(R')} = \frac{0,078}{0,682} \approx 0,11$ (en 1990, les chances d'être reçu à Polytechnique d'un jeune défavorisé représentent 11 % de celles d'un jeune quelconque).

On en conclut que pour Polytechnique, l'ascenseur social fonctionne moins bien en 1990 qu'en 1950. Ce qui est le contraire de la conclusion obtenue à la question 4 !!

8. Dans tous les cas (ce qui peut nous mettre la puce à l'oreille) la situation s'est aggravée de façon importante.

9. On a $P(R) = P(R \cap D) + P(R \cap F) = P_D(R) \times P(D) + P_F(R) \times P(F)$.

D'où $\frac{1}{k} = \frac{P(R)}{P_D(R)} = P(D) + t \times P(F) = P(D) + t \times (1 - P(D))$.

10. Entre 1950 et 1990, la valeur de x décroît de 0,908 à 0,682. Comme l'indicateur k est une fonction croissante de x il décroît également.

Il convient donc de choisir le premier indicateur $t = \frac{P_F(R)}{P_D(R)}$.

Commentaire

Cet indicateur est « classique » et est par exemple utilisé en médecine où il se nomme le « risque relatif » de F . Si par exemple $t = 16$ pour une maladie R , la probabilité d'avoir R est 16 fois plus forte chez les F que chez les D .

Voir : Schwartz (Claudine) – *Pratiques de la statistique* – Vuibert 2006.