

Crues et notion de probabilité

Niveau

Énoncé n° 1 : troisième (programme 2008), seconde, première.

Énoncé n° 2 : terminale S.

Situation étudiée

Le magazine *Le Point* du 13/09/2002 écrit : « Une crue de la Seine comparable à celle de 1910 se produit en moyenne tous les cent ans et la probabilité d'une telle catastrophe augmente d'année en année ».

Une crue de la Seine analogue à celle de 1910, qualifiée de « centennale », a chaque année, par définition, une chance sur 100 de se produire.

Après expérimentation des fluctuations d'échantillons de taille 100 (un siècle), on reconsidèrera l'affirmation du journaliste.

Type d'activité

Travaux dirigés et expérimentation sur tableur.

Durée

50 minutes.

Objectifs

Contenus mathématiques au programme

Énoncé n° 1 : moyenne, notion de probabilité, fluctuations d'échantillonnage.

Énoncé n° 2 : loi binomiale.

Enjeux citoyens

Notion de probabilité et d'indépendance pour des phénomènes rares à l'échelle humaine.

Notion de risque.

Notion de modèle.

Comprendre les débats à propos des risques naturels.

Capacités et attitudes

Esprit critique. Remise en cause d'une opinion première.

Expérimentation par simulation : savoir mettre en place une simulation et en interpréter les résultats.

Organisation

Les élèves doivent savoir simuler la réalisation d'un événement ayant une probabilité p de se réaliser : tirage aléatoire dans une urne bicolore ayant une composition connue.

Pour l'énoncé n°2, en terminale S, les élèves doivent connaître la loi binomiale.

Description des activités

Énoncé n°1 (seconde ; troisième en adaptant – four nir la simulation)

Énoncé élève

Le magazine *Le Point* du 13/09/2002 écrit : « Une crue de la Seine comparable à celle de 1910 se produit en moyenne tous les cent ans et la probabilité d'une telle catastrophe augmente d'année en année ».

1. Une crue de la Seine analogue à celle de 1910 est qualifiée de « centennale ». La dernière crue centennale de la Seine s'est produite en 1910.

Pensez-vous que cette année, Paris :

a **plus** de risque de subir la crue centennale qu'il y en avait en 1911 ;

a **moins** de risque de subir la crue centennale qu'il y en avait en 1911 ;

n'a **ni plus ni moins** de risque de subir la crue centennale qu'il y en avait en 1911 ;

qu'on ne peut pas dire.

2. Par définition, une crue « centennale » a, chaque année, une chance sur 100 de se produire.

a) Si l'on voulait simuler l'arrivée d'une crue centennale à l'aide d'une roue de loterie, comment devrait-on partager cette roue ?

Montrer que l'instruction =ENT(ALEA()+0,01) permet de simuler sur un tableur l'arrivée d'une crue centennale.

b) Sur une feuille de calcul, simuler en colonne A les crues centennales survenant durant un siècle. Réaliser une représentation graphique en utilisant le « type histogramme ».

Appuyer sur F9 pour effectuer de nombreuses simulations.

– A-t-on dans la grande majorité des simulations, une et une seule crue centennale par siècle ?

– Dans un siècle, avez-vous observé plusieurs crues centennales à quelques années d'intervalle ?

c) Souhaitez-vous modifier votre réponse à la question 1 ? Si oui, comment ?

3. a) Faire la somme des 0 et des 1 de la colonne A. À quoi correspond cette somme ?

b) Après sélection de la colonne A, la recopier vers la droite jusqu'à la colonne IP pour simuler 250 siècles.

Calculer la moyenne du nombre de crues centennales par siècle et effectuer plusieurs fois F9. Que constatez-vous ?

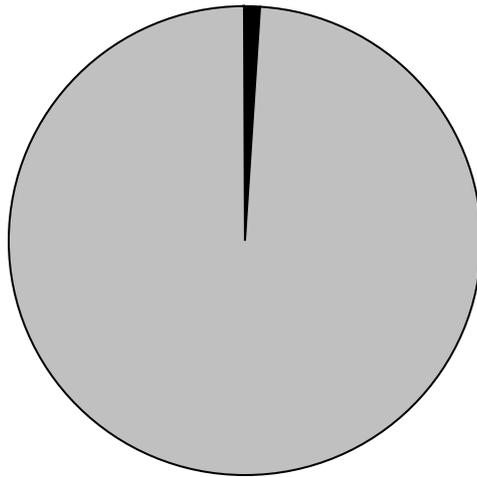
4. Qu'est-ce qui est faux dans la phrase du journaliste citée au début ?

Comment expliquez-vous son erreur ?

Éléments de réponse

1. Opinion « a priori ». On répond « comme on le sent ».

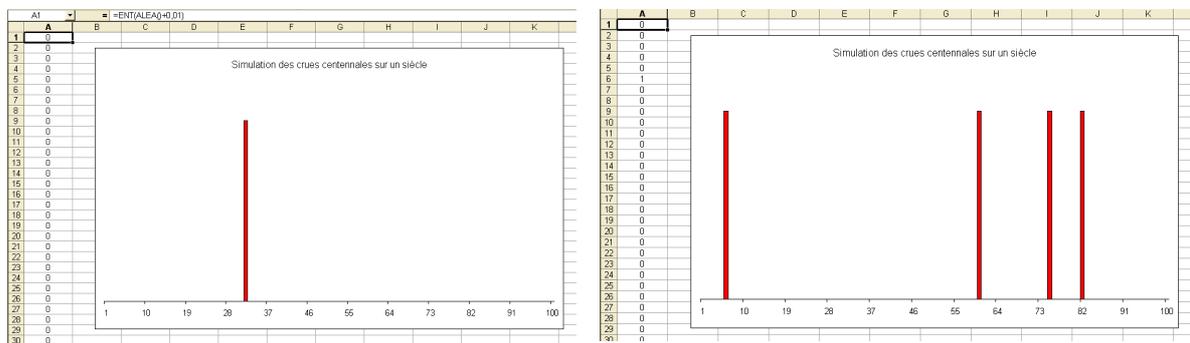
2. a) Il faut partager la roue de loterie en deux secteurs dont l'un fait 3,6°.



L'instruction `=ENT(ALEA()+0,01)` donne 0 avec 99 chances sur 100 et 1 avec 1 chance sur 100. Il suffit de convenir que la valeur 1 correspond à la crue centennale.

b) On constate sur les simulations (voir les images d'écran suivantes) que :

- le cas d'une et une seule crue centennale par siècle est loin d'apparaître dans la grande majorité des simulation ;
- il se produit assez souvent des regroupement de 2 ou 3 crues centennales à quelques années consécutives.



c) La seule « bonne réponse » est la troisième : « ni plus ni moins de risque », par définition de « crue centennale ».

Remarque pour le professeur :

La réponse « on ne peut pas dire » n'est pas exacte. À partir du moment où l'on parle de crue « centennale » on est dans un modèle qui suppose en fait l'indépendance. On peut utiliser comme image qu'une roue de loterie n'a pas de mémoire.

En revanche il est vrai qu'on ne peut pas dire que ce modèle est exact (en fait tous les modèles sont faux...).

3.a) On calcule le nombre de crues centennales sur un siècle.

b) On constate que la moyenne du nombre de crues par siècle est très proche de 1. C'est une moyenne sur 250 siècles.

c) On peut considérer que le début de la phrase est vrai (en moyenne tous les cent ans), si l'on admet le modèle de la crue centennale (la roue de loterie n'a pas de mémoire).

En revanche la fin de la phrase est faux : la probabilité n'augmente pas du fait que cela fait longtemps que l'événement ne s'est pas produit. Il y a, par définition, indépendance du passé.

4. La notion de moyenne, associée ici à la crue centennale, n'est pas perceptible à l'échelle humaine et ne prend de sens que sur des centaines de siècles. Le journaliste n'a pas compris l'indépendance supposée du phénomène par rapport au passé.

Commentaire

Ce qu'il faut retenir à propos de la notion de « crue centennale » c'est « une chance sur 100 », sans mémoire, comme si l'on tournait une roue de loterie.

Énoncé n°2 (terminale S)

Le magazine *Le Point* du 13/09/2002 écrit : « Une crue de la Seine comparable à celle de 1910 se produit en moyenne tous les cent ans et la probabilité d'une telle catastrophe augmente d'année en année ».

1. Une crue de la Seine analogue à celle de 1910 est qualifiée de « centennale ». La dernière crue centennale de la Seine s'est produite en 1910.

Pensez-vous que cette année, Paris :

a **plus** de risque de subir la crue centennale qu'il y en avait en 1911 ;

a **moins** de risque de subir la crue centennale qu'il y en avait en 1911 ;

n'a **ni plus ni moins** de risque de subir la crue centennale qu'il y en avait en 1911 ;

qu'on ne peut pas dire.

2. Par définition, une crue « centennale » a, chaque année, une chance sur 100 de se produire.

a) Montrer que l'instruction =ENT(ALEA()+0,01) permet de simuler sur un tableur l'arrivée d'une crue centennale.

b) Sur une feuille de calcul, simuler en colonne A les crues centennales survenant durant un siècle. Réaliser une représentation graphique en utilisant le « type histogramme ».

Appuyer sur F9 pour effectuer de nombreuses simulations.

– A-t-on dans la grande majorité des simulations, une et une seule crue centennale par siècle ?

– Dans un siècle, avez-vous observé plusieurs crues centennales à quelques années d'intervalle ?

c) Souhaitez-vous modifier votre réponse à la question 1 ? Si oui, comment ?

3. a) Faire la somme des 0 et des 1 de la colonne A. À quoi correspond cette somme ?

b) Après sélection de la colonne A, la recopier vers la droite jusqu'à la colonne IP pour simuler 250 siècles.

Calculer la moyenne du nombre de crues centennales par siècle et effectuer plusieurs fois F9. Que constatez-vous ?

4. On désigne par X la variable aléatoire qui, pour un siècle au hasard, donne le nombre de crues centennales.

a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) Quel calcul peut justifier l'expression « en moyenne tous les cent ans » ?

5. a) Calculer à l'aide du tableur $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$; $P(X = 3)$.

- b) Justifier que dans la majorité des cas, on n'a pas une crue centennale par siècle.
6. Qu'est-ce qui est faux dans la phrase du journaliste citée au début ?
Comment expliquez-vous son erreur ?

Éléments de réponse

4. a) On a la répétition de 100 épreuves aléatoires indépendantes (car chaque année la probabilité d'une crue est la même) avec deux issues possibles, crue centennale de probabilité 0,01 ou non, où X correspond au nombre total de crues.
Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,01$.

b) On a $E(X) = 100 \times 0,01 = 1$.

5. a) L'instruction =LOI.BINOMIALE(A2;100;0,01;FAUX) fournit les résultats suivants.

k	P(X=k)
0	0,36603234
1	0,36972964
2	0,18486482
3	0,06099917

b) On a $P(X \neq 1) \approx 0,63$.

Bilan

Dans une revue technique de juin 2003¹, des « spécialistes », ingénieurs et hydrologues, insistent sur le fait « *qu'informer les citoyens sur les risques d'inondation par des messages clairs et compréhensibles est un enjeu social et économique fort mais complexe* ». Seule l'expérimentation par simulation permet de rapidement se rendre compte que sur l'échelle d'un siècle, les réalisations d'un événement ayant chaque année 1 chance sur 100 de se produire conduit à des observations très variables, et que la « moyenne », une fois tous les 100 ans, n'a de sens que pour un grand nombre de siècles. Maintenant, il est possible que le modèle de la crue centennale (qui suppose l'indépendance) ne soit pas adapté à la situation... Il s'agit cependant d'un modèle simple réellement utilisé dans ce genre de situation.

¹ Revue *Ingénieries – eau, agriculture, territoires* n°34 juin 2003, article intitulé *Risque d'inondation : une notion probabiliste complexe pour le citoyen* de N. Gendreau, F. Grelot, R. Garçon et D. Duband.

Important
document à conserver

La carte de votre arrondissement, à l'intérieur de ce document, vous permet, dans l'hypothèse d'une crue du type de celle de 1910, de prendre connaissance de la situation de votre lieu d'habitation. Vous pourrez alors vous y préparer grâce à quelques conseils pratiques que vous trouverez en dernière page.

MAIRIE DE PARIS

« Document à conserver » (jusqu'en 2010 ?) distribué par la mairie de Paris pour se préparer à la prochaine crue centennale.

À supposer que le risque est le même qu'il l'était au début du XX^e siècle, on peut cependant affirmer, que les dégâts, le coût et la désorganisation seraient bien supérieurs.

3

Sondages

